

測定の基礎

高見晋一

環境資源研究所

Measurement Basics

Shinichi, TAKAMI

(LABORATORY FOR ENVIRONMENTAL RESOURCES)

1. はじめに

測定とはあるものがどれくらいあるかを定めることである。こういった測定の対象とする量には、数えられる量(分離量あるいは離散量)と数えられない量(連続量)とがある(星田, 2005)。たとえば, ある村があって, その川にかかっている橋の数とそれぞれの橋の長さを知りたいとしよう。分離量である「何本か」を知るには, 数えればよい。このように, 分離量は, 一般に, すでに「1」という“単位”にくざられているので, そのまま数えることによって直ちに求めることができる。しかし, 連続量である橋の長さはそうはいかない。そこで, たとえば歩いてみて, 何歩あるかを数えるといったやり方をとる(歩測)。歩幅を基準としてそれと比べるのである。橋の長さを歩幅で“分離”し(切り取って), それを数えるといってもよい。以下, 対象量が連続量の場合の単位を「計量単位」とよぶことにする。通常, 物理単位とよばれるものである。

分離量であっても数が多いと, 一つ一つではなく, あるまとまった数で対象を切り取っていく方が便利だ。たとえば, ビール工場では, 一日にビールを何千本も生産するだろう。そんな場合一本一本数えたり, 運んだりしては, 間尺にあわない。そこで, たとえば, 12 本入りのケースに入れておいて, このケースを一つの“単位”(ダース)とみなせば, 取り扱いがずっと楽になる。もっとも, ビールや鉛筆なら, まだ一本一本でも取り扱える。しかし, これが分子や光粒子となると, 通常の科学では, ある数をまとめて取り扱わないとはなしにならない。モルという単位が必要とされるゆえんである。このように, 分離量の場合の単位を「計数単位」とよぶことにする。

計量単位があるひとかたまりの量であるのに対して, 計数単位はあるひとかたまりの数をさす。

以上を念頭に, 改めて測定を定義し直すと, つぎのようになる。ある基準の量(単位=unit)を決めて, 知りたい量がその何倍であるかを表す数値(numerical value)をきめることといえる(森川, 2006)。これを式で表せば, 次のようになる。

$$\text{対象量/単位} = \text{数値} \quad (1)$$

つまり, 測定とは, 単位という手だて(手段)でもって, 数値という結果を得る行為であるといえよう。そこで, 以下, はじめに単位を, 次いでそれを使って得られる数値(測定値)について, それぞれもつとも基本的な概念をみていこう。

2. 単位の基本

単位は個別単位と普遍単位とに分けることができる。個別単位は時と場合によって変わってくる。

上述の「歩(あるいは歩幅, pace)」は個別単位の典型的な例である。特定の一人が行えば, 一応, 各橋の長さを比較できる。しかし, 何人かがそれぞれ別個の橋を歩測したとすれば, その結果を直ちに比較することはできない。各人の歩幅が違うからだ。比較するには, それぞれの個別単位を誰か特定の人の単位に, あるいはもっと普遍的な共通の単位に換算しなければならない。これがキャリブレーション(検量)である(注 1)。これに対して, いつでもどこでも一定の単位, これが普遍単位(「共通の物差し」)で, その1つがここで主として取り扱う国際単位系(仏語で *Système International d'Unités*, 略して SI)である。

国際単位系はメートル法の確立から 2 世紀程たった 1960 年, 第 11 回国際度量衡総会で新しい統一的な単位系として認められた(Clark, 1969; The Royal Society Conference of Editors, 1968)。日本でもこのながれに呼応して, 1992 年 5 月に計量法が全面的に改正され, 1993 年 11 月 1 日から施行された(高木,

<http://www.agrmet.jp/sk/2012/A-1.pdf>

2012 年 4 月 30 日 掲載

Copyright 2012, The Society of Agricultural Meteorology of Japan

1995)。新しい単位系といっても、その基本はメートル法に他ならない。メートル法には周知のように、CGS系とMKS系がある。SIはこのうちのMKS系を基盤としたもので、いわばその進化、改良版といえよう。

SIは二つの柱からなる。第一は、基本(basic)単位と誘導(組み立て、derived)単位から構成されていることである。表1には、我々の関係する分野で通常必要なものとも重要なものだけを示した。基本単位では、3つの力学単位と熱学単位の4つである。基本単位には、この他、物質質量(mol)、および電磁気学(ampere, A)と光学の単位(candle, cd)の3つ、計7つがある(注2)。誘導単位は以上7つの基本単位から導かれる単位である。第二は、10の3n乗(nは整数)だけ変わる「接頭辞」を用いることである(表2)。ただ、便宜上、以上の単位と接頭辞の他に暫定的に使ってもよいものがある(表3)。いずれも、私達になじみの深いものだ。

2.1 計量単位

表1の4つの基本単位および5つの誘導単位は全て計量単位である。これらの単位を理解するには、注を含むこの表でほぼ十分である。この表の注は、誘導単位を導く手順を示したものである。すなわち、はじめに誘導物理量を導く物理則あるいは定義式を与える(表1の注1では、運動の第二法則)。次に、これらの物理則あるいは定義式の単位を計算する。そして最後に、こうして得られた多かれ少なかれ長たらしい単位(表1の注1では、加速度と質量の単位の積 kg m s^{-2})を、新しい単位(N)で置き換える、と

表1. 環境科学において重要な基本(basic)単位と誘導(derived)単位

	物理量	次元	単位名	単位記号
BaSiC	Mass	M	kilogram	kg
	Length	L	meter	m
	Time	T	second	S
	Thermodynamic temperature	-	degrge Kelvin	K
Derived	Force ¹	MLT ⁻²	newton	N
	Energe/Work ²	ML ² T ⁻²	joule	J
	Heat	ML ² T ⁻²	joule	J
	Pressure ³	ML ⁻¹ T ⁻²	Pascal	Pa
	Power ⁴	ML ² T ⁻³	Watt	W

- 1 力=質量×加速度 $N = \text{kg ms}^{-2}$
- 2 仕事=力×距離 $J = N m$
- 3 圧力=力/面積 $\text{Pa} = N/m^2$
- 4 仕事率=仕事/時間 $W = J/s$

表2. 単位とともに用いる接頭辞

べき乗	接頭辞名	単位併用記号
10 ⁻¹²	pico	p
10 ⁻⁹	nano	n
10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁻³	mili	m
10 ³	killo	k
10 ⁶	mega	M
10 ⁹	giga	G
10 ¹²	tera	T

表3. 当面使ってもよいSI以外の単位と接頭辞

物理量	単位名	単位記号
Mass	ton	t
Area	hectare	ha
Volume	litter	L
Pressure	bar	bar
べき乗	接頭辞名	単位併用記号
10 ⁻²	centi	c
10 ⁻¹	deci	d
10	deca	da
10 ²	hecto	h

いった順である。以下は、この理解を完全に十分にするために留意しなければならない補足である。

(1) 単位の変換

単位変換は、変換される単位を変換しようとする単位へ置き換えていけば簡単にできる。その際、できるだけ10のべき乗を使うことと、マイナスの指数は分数にして計算するようにする。例として、前記の人の歩く速さとそよ風(風力2程度の風)の速さを比べる。人の歩く速さを4.0 kmh⁻¹、風速を2.0 ms⁻¹とし、kmh⁻¹をms⁻¹に変換しよう。K=10³で、1時間(h)は10のべき乗を使ってh=3.6×10³sとかけるので、それぞれこれらで置換え、h⁻¹は分数にする。すなわち、

$$4.0 \text{ kmh}^{-1} = (4.0 \times 10^3 \text{ m}) / (3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 1.1 \text{ ms}^{-1}$$

小さな単位(この場合、ms⁻¹)から大きな単位(この場合、kmh⁻¹)への変換も、次のようにまったく同様に行うことができる。

$$2.0 \text{ ms}^{-1} = (2.0 \times 10^{-3} \text{ km}) / [1 / (3.6 \times 10^3) \text{ h}] = 7.2 \text{ kmh}^{-1}$$

多くの場合、SIよりもCGS単位系の方が感覚的には分りやすい。この単位系がもともと私達の日常生活のスケールに基づいているからだ。たとえば、日射量 1000 Wm⁻²とはどれくらいの熱量なのだろう

か。面積として cm^2 、熱量として cal 、時間として分の単位へ換算すると次のようになる。1 W = 1 J s⁻¹ (表 1), 1 J = (1/4.2) cal, 1 m² = 10⁴ cm², 1 s = (1/60) min であるから

$$1000 \text{ Wm}^{-2} = \left[10^3 \times (1/4.2) \text{ cal} \right] / \left[10^4 \text{ cm}^2 (1/60) \text{ min} \right] \\ = 1.4 \text{ cal cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$$

となる。したがって、1000 Wm⁻² の日射量とは、約 3 分で一合升(開口部面積 40 cm²)に満たした水の温度を 1℃ほど上げる熱量だと見積もることができる。

(2) 圧力の単位

1 気圧 (atm) は 760 mmHg に等しい。これは定義である。すなわち、Js⁻¹ = W などと同様、水銀柱 760 mm の高さに相当する圧力を 1 atm とよぶことにしようという約束にすぎない。しかし、これが 1013 hPa (mb) に等しいというのは、定義を使った置換だけでは導けない。圧力の物理的意味を考慮する必要がある。まず、水銀柱で大気圧を測るということは、水銀柱の底部における圧力と大気圧とのつり合いを利用している、ということを理解する必要がある。また、そのためには圧力の定義、圧力の伝達(パスカルの原理)、力(重さ)の発生に関する基本的物理が分かっているなければならない。その上で、水銀柱の断面積を $S \text{ m}^2$ とすれば、水銀の密度は $13.6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ であるから(表 1), 760 mm Hg

$$= \left\{ 760 \times 10^{-3} \text{ m} \times S \text{ m}^2 \times 13.6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \right\} \\ \times 9.8 \text{ ms}^{-2} / S \text{ m}^2 = 1013 \times 10^2 \text{ kg m s}^{-2} / \text{m}^2 \\ = 1013 \times 10^2 \text{ N/m}^2 = 1013 \text{ hPa}$$

(3) 降水量と蒸発量の単位

降水量の単位は mm である。これは、降水が流れ去らないとして地表面上に貯まった時の水深を表している(注 3)。したがって、地表面の面積を大きくとろうと、小さく取ろうと同じである。大きな口径の円筒形容器で貯水しても小さな口径の円筒形容器で貯水しても、貯水量は変わるが、水深は変わらない(注 4)。降水量の単位が面積に依存しないことは、それが単位面積あたりの量であることを意味している。いま、降水量が $h \text{ mm}$ あったとしよう。すると、1 m² あたりの水量は $10^{-3} h \text{ m}^3$ あるいは水の密度を 1000 kg m^{-3} とすれば、 $h \text{ kg m}^{-2}$ となる。すなわち、

$$h \text{ mm} = h \text{ kg m}^{-2} \quad (2)$$

降水量は期間(時間)に依存する。そこで、1 時間当たりとか 1 日当たりといった時間を指定する必要がある。こうして、単位時間を指定して表した降水量は結局、フラックス密度となることが分る。

蒸発量も、失われるか貯まるかの違いだけで、降水量と同じである。地表面上にたまって水深 $h \text{ mm}$ の水が蒸発してなくなれば、それが蒸発量である。測定には、貯水した浅い容器を使い、その水深の変化から蒸発量をもとめる。蒸発量の場合は、水量ではなくて、熱量で表すこともある。水蒸気は蒸発の潜熱(25℃のとき、2442 Jg⁻¹)を含んでいるからである。すると、蒸発量 $h \text{ mm}$ は

$$h \text{ mm} = 2.442 h \text{ Jm}^{-2} \quad (3)$$

となる。

(4) 環境量の単位

このように見てくると、環境を特徴づける物理量は対象の大きさに依存しない量であることが分かる。物理量には、大きさに依存する量と依存しない量との 2 種類がある(注 5)。降水(蒸発)量についてはすでにのべたように測る容器の大きさには依存しない。圧力も同類である。単位面積あたりの力だからだ。あるいは、単位体積当たりのエネルギーとみることもできる。なぜなら、

$$\text{Pa} = \text{Nm}^{-2} = (\text{Nm}) \text{m}^{-3} = \text{Jm}^{-3}$$

となるからだ。放射は、すでにみたようにフラックス密度で表すから、相当熱量(潜熱)であらわした蒸発速度と同じく大きさに依存しない量であることが分かる。温度も場所や物体の大きさに依存しない。さらに、湿度や二酸化炭素も分圧あるいは濃度で測るから、同じ仲間である。これは、当然といえば当然だ。環境量が、測定対象や測器の大きさによって変っているのは、到底、その場所の環境の特徴を表すことにはならない。

2.2 計数単位モル

計数単位の基本単位は、表 1 から除いた物質量の基本単位、モルだけである。このモルという単位は分り難い(注 6)。そもそも、SI の他の基本単位と違って日常生活では殆ど使われないので、多くの人にはなじみがうすい。また、物質量などという分り難い術語が現れる。そのうえ、同じ計数単位のダースなどと違って、直接、求めることができない。モルを単位として対象量を直接測定することはできず、計量単位を介在させなければならない。つまり、基本単位でありながら、その実、他の基本単位に「依存している」といえる。

モルの正式な定義(高木, 1995)は、実際上は役に立たない。そこでここでは、式(1)に基づき、モルを、ダースと同じように(注 7)簡明に定義しなおそう。つまり、「粒子の集まりがあって、その数がアボガドロ定数に等しいとき、この粒子数を 1 mol とす

る。」すると、式(1)から次の関係式が得られる。

$$n[\text{mol}] = N / \{A / [\text{mol}]\} \quad (4)$$

ここで、 N は対象物の粒子(分子など)数、 A はアボガドロ定数、そして n (mol)はこの対象量のモル数(注 8)である。たとえば、 602×10^{23} 個の分子があれば、これは

$$602 \times 10^{23} / (6.02 \times 10^{23} / \text{mol}) = 100 \text{ mol}$$

という数になる。このように、モルは対象量の粒子数を測る単位である。しかし、対象量のモル数を実際に求めるには、分子量などの連続量からなる「単位」を使って求める。それはなぜか。鉛筆やビールが対象なら、その本数を数えることによって、何ダースかを求めることができる。また、コメ粒のようなものなら、一定数だけ入る「定数マス」を作れば、測定対象が何粒かを測ることができる(注 9)。しかし、分子や原子等の粒子については、このように数える(測る)ことができない。少なくとも今のところ、その数を手軽に数える「マス」は存在しない。したがって、モルは別の量から間接的に求めざるを得ない。

いま、1 個の粒子がもつ質量、エネルギー量、あるいは体積を X (unit)とすれば、式(4)から、次の関係式が得られる。

$$n[\text{mol}] = NX(\text{unit}) / (AX \text{ unit} \cdot \text{mol}^{-1}) \quad (5)$$

式(6)を使えば、粒子数のかわりに、質量、エネルギー量あるいは体積といった測定可能な量でもって対象量の「数、ただし一定数の集まりの」をもとめることができる。このように、モルを求める際に、質量なり、エネルギーを測るのは、式(4)の代わりに式(5)によって間接的にモル数を決めるのに必要だからだと理解すればよい。あるいは、粒子 1 個の質量、エネルギー量あるいは体積が X なら、この粒子 1 モルは、 NX (ただし、 $N=6.02 \times 10^{23}$)の質量、エネルギー量あるいは体積を有するとみなす。これが、モルを理解するカギの 1 つである(注 10)。

質量との関係は、化学でおなじみである。ある物質の分子量が M ということは、この物質 1 mol、つまり 6.02×10^{23} 個の分子の質量が M g あるということだ。したがって、この物質が m (g)存在すれば、式(5)において、 $NX=m$ 、 $AX=M$ であるから、

$$n(\text{mol}) = m \text{ g} / (M \text{ g mol}^{-1}) = (m/M) \text{ mol} \quad (6)$$

気体の場合は、さらに、測定対象の体積と 1 mol あたりの体積から、この物質の mol 数を求めることができる。同温同圧下ならば、その種類にかかわらず、

1 mol あたりの体積は等しい(0°C, 1 気圧下で 22.414 L)からだ。したがって、ある体積 V (L)のガスの mol 数 n を求めたい時は、ガスの種類にかかわらずこの体積を標準状態の体積(V_0)に直して、それを 22.414 L で割ればよい(式 5)。こうして得られるのが、理想気体の状態方程式にほかならない。測定対象が固体や液体の場合は、その体積を簡単に求めることができない。温度や重力によって、物質により、サイズにより様々に変わるからだ。したがって、体積から mol を求めることは出来ない。

エネルギーから見たモル、いいかえればモル光子(mol quantum)についても同様に考えればよい。光は波長(振動数)の異なる種々の粒子(光子)の集まりとみなすことができる。この光子 1 mol あたりのエネルギー(E)は、波長を λ (nm)とすれば、次のようになることが分っている(注 11)。

$$E = 1.20 \times 10^8 / \lambda [\text{J/mol}] \quad (7)$$

つまり、式(5)において、 $AX=E$ であるから、あるエネルギー量 Q [J]が何(n) mol (あるいは通常 mol と区別するため mol quantum)となるかは次式から求められる。

$$n = Q \cdot \lambda / (1.20 \times 10^8) [\text{mol}] \quad (8)$$

3. 測定値の処理

式(1)から分るように、測定の結果得られる数値は、同じものを測っても、測定器の単位によって変る。また、同じものを同じ単位で測っても、測定というものの宿命として、測るたびに少しずつ異なる。ここでは、以上の二つことを測定値の処理に関する基本として取り上げる。

3.1 有効数字

測定によって実際に得られる数値を有効数字といい、その桁数は単位に応じて異なる。たとえば、9.876 mL の水を最小目盛り 1 mL (つまり単位)の 100 mL メスシリンダーで測るとしよう(木村, 2007)。すると、1 mL 未満も目分量で読み取れるので、たとえば 9.9 mL という測定値が得られるだろう(図 1a)。この場合、最初の 9 はもちろん、つぎの 9 も目分量とはいえ測った値で意味があるから、有効数字だ。次に、同じ水を 0.1 mL 刻みの 10 mL のメスシリンダーに入れ、同様に、最小目盛り未満を目分量で読み取る。その結果、9.88 mL という測定値が得られたとしよう(図 1b)。この場合、有効数字は 9 と 8 と 8 の 3 桁となる。このように、有効数字は精しく測れる測器を使えば、いいかえれば測定につかう単位が小さいほど、桁数がより多くなる。

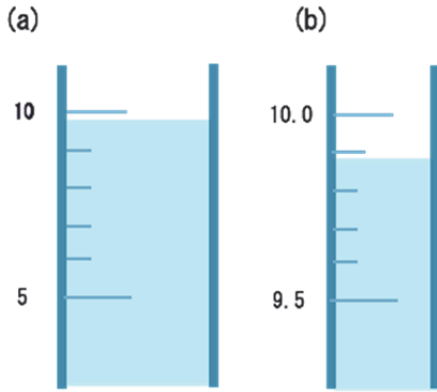


図1 100 mL (a)と10 mL (b)のメスシリンダーによる9.876 mLの水の測定(木村, 2007)

(1) 有効数字の標準的な表し方

上記の測定値 9.9 mL (図 1a) を L であらわすと 0.0099 L となる。しかし、すでにのべた理由から最初の 3 つの 0 は、単なる位取りのための数字であって、有効数字ではない。一方、図 1b の測定で、もし 9.9 の目盛りにぴったりだったとしたら 9.90 mL と読み、そう記さなければならない。最後の 0 も測定した「有効な」値だからだ。このように有効数字とそうでない 0 との紛らわしさをさけるためには、測定値を次のように有効数字と 10 の何乗かの積で表すのが標準的な表示法である。

$$9.9 \times 10^{-3} \text{L} \quad \text{および} \quad 9.90 \times 10^{-3} \text{L}$$

(2) 測定値の確からしさ

有効数字の最後の桁は、通常、目分量で読むため、不確かである。たとえば、前述の 9.9 という数の場合、最後の 9 は 0.9 ぴったりではなく、上の例のように 0.88 かもしれないし、0.92 かもしれない。9.9 という数値は、一般には、9.85 と 9.95 の間の値とみなしてよいだろう(図 1b)。いいかえれば、有効数字の最後の数値は、それより一桁小さい数値を四捨五入して得られる場合と同じ程度の不確かさがあるとみなす。

$$9.85 \leq 9.9 < 9.95 \quad \text{あるいは} \quad 9.9 = 9.9 \pm 0.05$$

(3) 有効数字の演算

有効数字は上記のように不確かさを含んでいるから、四則演算の結果もそれを考慮して表記しなければならない。これをルール化すると次のようにまとめられる(川島, 1990)。

- (1) 要求される精度+1 桁の数値を使用する(気体定数, 分子量, 円周率など)。

- (2) 有効数字+1 桁で計算を進める。

- (3) 最後に有効数字を合わせる。

- 測定値の加減は、それらの末位の桁を比較して、その高い方に計算結果の末位を合わせる。
- 測定値の乗除は、それらの有効数字の桁数を比較して、その小さい方に結果の有効数字の桁数を合わせる。

①加減

たとえば、9.9 mL と 0.001 mL の測定値同士で加減を行う場合は次のようにしなければならない。

$$9.9 \pm 0.001 = 9.9$$

これを

$$9.9 \pm 0.001 = 9.899 \quad \text{あるいは} \quad 9.901$$

としてはならない。9.9 という測定値の小数第二位以下は不明だからだ。これは、図 1a のメスシリンダーにさらに 0.001 mL の水を加えた場合を想定すれば直ちに理解できる。第二位以下で増減があっても、測れないから足したり引いたりすることは意味がない。9.88 mL と 0.001 mL の足し算も、同様に考えて、9.88 mL となることが分かる。

②乗除

たとえば、長方形の 2 辺の測定値、73 cm と 128 cm、から面積を求めるとその数値は次のようになる(直接、測定するのではなく、測定値同士の計算から、測定対象量を間接的に求める方法を間接測定という)。

$$73 \times 128 = 9.3 \times 10^3$$

それは

$$\begin{array}{r} 72.5 \leq 73 < 73.5 \\ \times 127.5 \leq 128 < 128.5 \\ \hline 9243.75 \leq 9344 < 9444.75 \end{array}$$

となって、100 の位の数値は不確かであり、それ以下は無意味だからだ。すなわち、有効数字は 9 と 3 とみなされる。

3.2 個々の測定値とそれらの平均値

正規分布をする測定値の集まり(集団)があるとして。すると、「個々の測定値」については、標準偏差(SD, σ)が、そのばらつきの尺度である。ここで、いくつかの測定値の平均値でもとの集団の平均値を推定すると、これらの「平均値の推定値」については、平均誤差、別名、標準誤差(SE, SD/\sqrt{n} ; n は標本の個体(ケース)数)がばらつきの尺度となる。ここでは以上のことを基本から理解し、測定で得られた数値データを適切に表示することを学ぶ。

(1) 個々の測定値の分布

測定には必ず誤差が伴う。この誤差は大きく系統誤差と偶然誤差とに分けられる。系統誤差には、測定に使う器具に由来する誤差(器械的誤差)、実験の基礎になる理論式から生じる誤差(理論的誤差)、測定者のくせによる誤差(個人的誤差)があり、いずれも種々の手段で十分小さくできる(川島, 1990)。しかし、これらを十分除いても偶発的に生じる誤差、偶然誤差が残る。この誤差の現れ方は、多くの場合には次のように正規分布をすることが分かっている。

いま、ある一定の量を繰り返し無限回測定した時に(母集団)、測定値(X_i)が平均値(μ)を中心に釣り鐘状の頻度分布(正規分布)に従うものとする。すると、偏差($X_i - \mu$)の68%は、この分布の標準偏差(注12)を σ とすれば $\pm\sigma$ の範囲に存在する。言い換えれば、真の値 μ は約68%の確率で次の範囲にある。

$$\mu = X_i \pm \sigma \quad (9)$$

そこで、 σ を「個々の測定値の標準偏差あるいは平均誤差」(阿部, 1980)とみなすことができる。

(2) 個々の平均値の分布

われわれは、しかし、無限回の測定を行うことはできない。通常、限られた回数(これを標本あるいは試料という)から“真の値”を推定しなければならない。それには、 n 回の測定で得られる標本の平均 M と標準誤差 SE をつかって次のように表す X_0 を推定値とすればよい。

$$X_0 = M \pm SE \quad (10)$$

ここで、 SE は式(9)の σ に相当するもので、「(平均値の)標準誤差あるいは平均誤差」とよばれる。そして、

$$SE = S/\sqrt{n} \quad (11)$$

から求められる。ただし、 S は標本標準偏差で、次式で得られる不偏分散 S^2 の平方根である。

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - M)^2}{(n-1)} \quad (12)$$

では、なぜ平均値の場合は、式(11)と式(12)とで定義される標準誤差 SE を使って、式(10)のように表すのだろうか。統計理論によれば、「平均が μ で標準偏差が σ の母集団(正規分布)から、無作為に抽出してケース数 n の標本をつくり、その平均値を M とすると、この M の集まりは平均値が μ で標準偏差が σ/\sqrt{n} の正規分布をする」(注13)。すなわち、母集団の σ が分かっているときは、 σ/\sqrt{n} が式(9)の σ に相当することが分かっているため、 σ/\sqrt{n} を誤差の尺度として、 X_0 を $X_0 = M \pm \sigma/\sqrt{n}$ と表せばよい。

なお、この式を式(9)と比べると、標本の個体数 n が1の時は、式(9)に帰着すること、 n が大きいほど誤差が小さくなるのがわかる。

しかし、実際は σ は分からないので、 σ の推定値(注14)である S を使って、 $X_0 = M \pm S/\sqrt{n} = M \pm SE$ と表す。すると、 μ がこの間にある確率がきまる。ただし、この場合、 M の集まりは正規分布ではないので(注15)、 X_0 が $M \pm SE$ の間にある確率は n によって変わり、 $n \rightarrow \infty$ の場合以外は68%より小さくなる。

いずれにしても、標本平均 M に対しては標準誤差 SE が、個々の測定値 X_i に対して σ がはたす役割りと同様の役割りを果たす。これが測定結果を式(10)のように表す理由である(注16)。

(3) 標準誤差か標準偏差か

以上のことから、平均値 \pm 標準誤差と平均値 \pm 標準偏差は、どう使い分けるべきかが分る。(2)でみたように、前者は標本平均値がどの程度母平均に近いかを表す。いいかえれば、標本平均はどの程度の誤差で母平均あるいは“真の値”を推定しているかを表す。

これに対して、平均値 \pm 標準偏差は、(2)でみたように、ある1つの測定値が得られた場合、それがどれだけその集団の代表値(平均値)から離れ得るかを表す。つまり、測定値の誤差よりも、平均値からの個々の測定値のずれに着目する。たとえば、気候平年値を考えてみよう。平年値とは30年間の気候データという母集団の平均値をいう。たとえば、ある年の一月の月平均気温が平年値から 2σ 以上離れていれば、約98%の確率でこんな値は得られないので、これを「異常」と定義することができる。

4. おわりに

近年の計測機器や計算、統計ソフトの進展は著しい。しかし、こうして多量のデータが簡単に収集、処理出来るようになるにつれて、有効数字や誤差といった基本的概念の取り扱いが粗雑になってきたように思われる。また、単位については、とりわけモル光子とエネルギーとの関係に混乱がみられる。そこでここでは、連続量に関する単位を計量単位、離散量に関する単位を計数単位として区分し、モルを後者に位置づけた。こうすることによって、モル光子は、エネルギーと違って、計数単位によって測定されていることが明確になる。平均値につける誤差についても、しばしば混乱が見られる。そこで、本稿では、平均値の誤差を表示するには平均誤差を使うべきであること(式10)を、個々の測定値の誤差表示(式9)と対比させて明示した。

いかに斬新な仮説のもとに、最新の測器で精密な測定を行なったとしても、得られる数値の取り扱い

が基本的ルールから外れているとしたら、その論文全体の信頼性が損なわれる。本稿は、環境関連分野の学徒が、測定値の処理に関して最低限、わきまえておくべきことを、基本から統一的に記述した。

演習問題

1. 電力量の単位でおなじみの kWh という単位は、環境関連でも使うと便利ことがある。たとえば、放射冷却装置の性能が 2.0 kW であったとすると、これを 10 時間作動させた時の放熱量を kWh と J で求めてみよう。

kWh で表わす場合は直ちに次のように求めることができる。

$$2.0 \text{ kW} \times 10 \text{ h} = 20 \text{ kWh}$$

これを J に変換すると

$$20 \text{ kWh} = 20 \times 10^3 \text{ (J/s)} \times 3600 \text{ s} = 72 \text{ MJ}$$

2. 貯水式の簡易降水量計を作成した。この降水量計では、降水を漏斗(直径 D cm)で受けてポリビンに貯水し、その体積 V (cc)を測って、降水量 P (mm)をもとめる。

(1) P と V との関係を求める式を導け。

漏斗の受け口から、深さ P の水が入って来たと考えればよいので(図 2)、

$$V = \pi D^2 P / 40$$

(2) 標準の貯水式降水量計では、降水量を 0.1 mm まで読み取ることになっている。この簡易降水量計では、最低どのくらいの貯水量が必要で、また、その貯水量をどのくらいの精度で読み取ればよいか。 $D = 18.5$ で、貯水量は 100 mL メスシリンダーで測るとする。

上の式に $D = 18.5$, $P = 0.1$ を代入して、

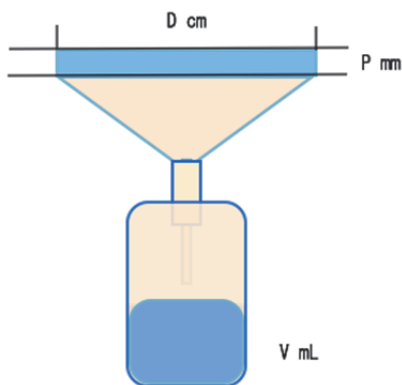


図 2 貯水式降水量計

P (mm) : 降水量, V (mL) : 貯水量, D (cm) : 受水口直径

$$V = 2.7 \text{ (mL)}$$

つまり、2.7 mL 以上の貯水量が必要だ。また、

$$P = 3.72 \times 10^{-2} V$$

なので、貯水量 10 mL 未満までは、0.1 mL 程度の詳しさと読み取ればよい(ただし、普通の 100 mL メスシリンダーの最小目盛りは 1 mL なので、0.5 mL の詳しさと読むのが精一杯だ)。さらに、貯水量が 10 mL 以上あれば、1 mL の精度で十分である。なお、この測器の場合、27 mL が 1 mm の降水量に対応するので、シリンダーに 27 mL づつ入れながら、mm 目盛りをつけていけば、降水量が直読できる雨量マスが得られる。

注

- (1) 測り方、測器によってはキャリブレーションが必要ない場合もある。測定値が物理学の原理、法則によって一義に決まる場合である。たとえば、風速を測るのに使うピトー管がそれである。風速は静圧と動圧の差から、ベルヌーイの定理によってもとめることができる(ただし、実際の測器は厳密にはこの法則に従わず、そのずれは個々に異なるので、検量が必要である)。このような測定を絶対測定という。一方、私達がよく目にする風車型や回転式の風速計は、ひとつひとつキャリブレーションが必要である。回転数と風速との関係は物理法則からは導けないからだ。このような測定を相対測定とよぶ。
- (2) 他に補助単位として角度を表すラジアンがある。
- (3) このことは、積雪を想定すると直ちに理解出来る。ただし、雪の場合、その深さ(積雪深)を降水量に直すと、密度の違いからの約 10 分の 1 となる。
- (4) 日本の降水量計の口径は 20 cm が標準であるが、これは国によって異なる。もし、口径によって降水量の測定値が系統的に違えばこういうことは許されない。ただし、実際は、雨滴や雪片の捕捉率が口径によっても変るので、他の条件が同じでも口径によって測定値が異なってくることもある。
- (5) 熱力学では圧力や温度など対象物体の大きさに依存しない量を示強変数、エネルギーや熱量のように大きさに依存する量を示量変数とよんでいる。
- (6) モルは、一時は質量という量の概念と混同されたこともあった(西条, 2009)。紆余曲折をへて、モルが SI の基本単位として正式に採択されたのは 1972 年である。なお、潮(2009)はモルをラジ

- アンなどと共に「無次元単位」というカテゴリーに分類している。しかし、その分類では、離散量を「数える」ための単位というモルの本質が隠されてしまうので、ここでは、計数単位というカテゴリーに入れた。
- (7) ダースといえば、まず 12 という数(個数, 本数など)を思い浮かべる。12 本のたとえ鉛筆の質量を思い浮かべる人はいないだろう。「同様に」というのは、モルもまず 6.02×10^{23} という数を思い浮かべようという意味である。
- (8) モルは数だから、それに数をつけるのは余分だ。しかし、数であることをはっきりさせるために、所によっては、あえて数をつけて表記する。
- (9) 実際に、一定数の孔をあけた「粒数板」とよばれる道具で、数えることがある。
- (10) ここで NX は、たとえば kg の単位を持つ質量で一見、連続量にみえる。しかし、常に粒子一個当りの質量の整数倍であるから離散量である。つまり、式(5)は式(4)と共に式(1)の特別の場合に相当する。
- (11) 有名なプランクの量子エネルギー仮説による。
- (12) このように、偏差は個々の測定値の平均値からの隔たりで、誤差は個々の測定値の“真の値”からの隔たりである。測定を無限回繰り返せば、両者は等しくなる。偏差、誤差などの定義については、阿部(1980)が明解である。なお、「標準偏差(あるいは誤差)」の「標準」とは平均という意味である。
- (13) これに関する説明は、佐藤(1985)あるいは桜谷・夏原(1988)が分かり易い。
- (14) S^2 は σ^2 の不偏推定値だが、 S は σ の不偏推定値

ではない。

- (15) 新村(2002)には平均誤差の有用性と重要性が繰り返し強調されている。
- (16) 厳密には、 $t = (M - \mu) / SE$ で定義される t の分布を考える。この分布 (t 分布) は正規分布に似た釣鐘状の形を示すが、正規分布よりもばらつきが大きい。ただし、 n が大きい程正規分布に近づき、 ∞ では正規分布と一致する。

References

- 阿部 健(編), 1980: 基礎物理学実験, 槇書店, 東京.
- Clark, J. B., 1969: New Physical and Mathematical Tables, Oliver&Boyd Ltd., Edinburg.
- 星田直彦, 2005: 単位 171 の新知識, 講談社, 東京.
- 川島和俊, 1990: 物理学実験, 共立出版, 東京.
- 木村勇雄, 2007: 有効数字の簡便な扱い, アクセス (2007年9月12日), <http://www.gs.niigata-u.ac.jp/~kimlab/lecture/numerical/index.html>.
- 森川鐵朗, 2006: 単位は語る, 技報堂出版, 東京.
- 新村秀一, 2002: パソコン活用 3 日で分かる使える統計学, 講談社, 東京.
- The Royal Society Conference of Editors, 1968: American Scientists 56(2), 159-164.
- 西条敏美, 2009: 単位の成り立ち, 恒星社厚生閣, 東京.
- 桜谷保之・夏原由博, 1998: 資源生物系の統計学, 文教出版, 大阪.
- 佐藤 信, 1985: 推計学のすすめ, 講談社, 東京.
- 高木仁三郎, 1995: 単位の小事典, 岩波書店, 東京.
- 潮 秀樹, 2009: 単位の本質, 技術評論社, 東京.